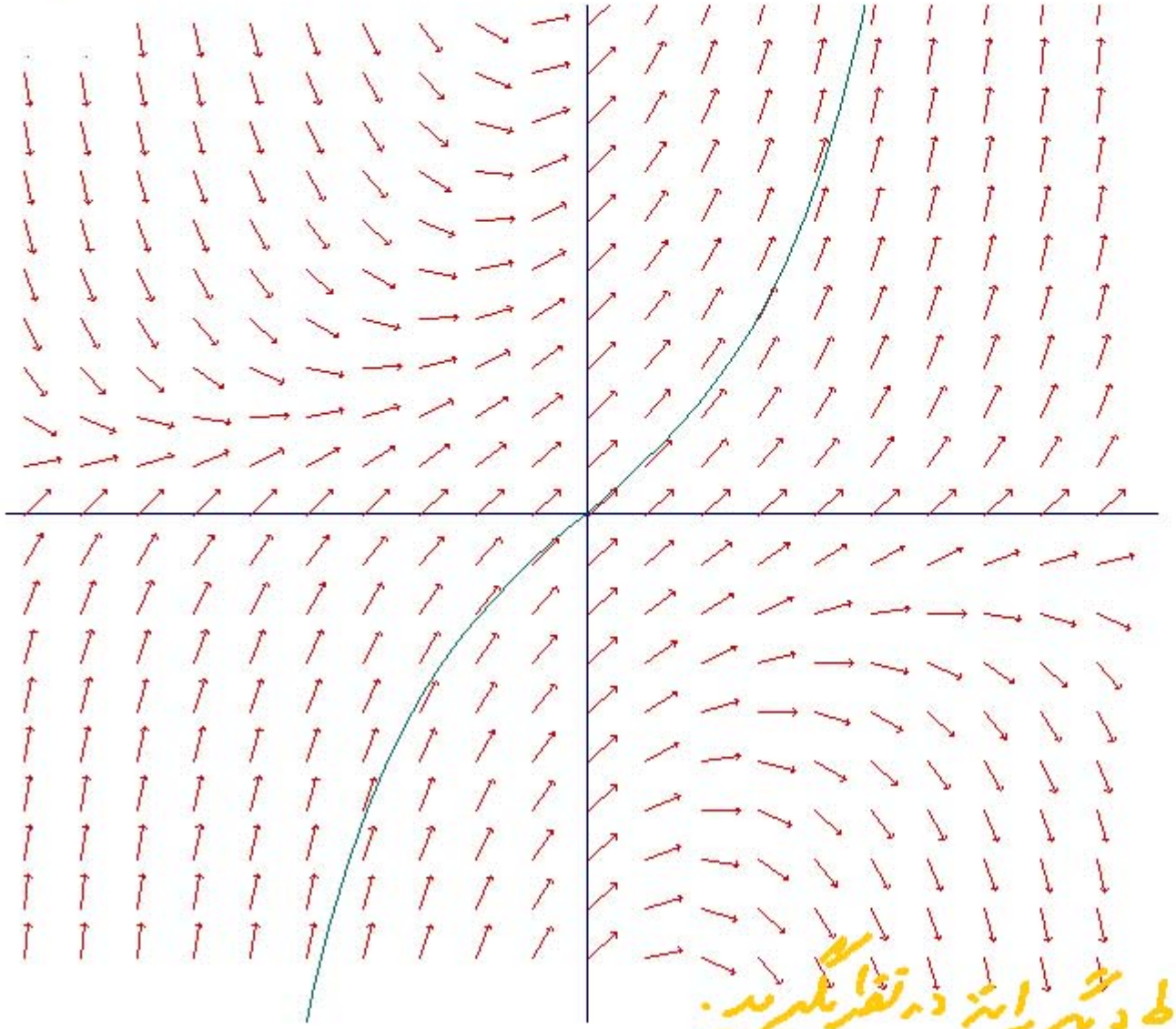
پاسخ‌های آزمون میان‌ترم معادلات دیفرانسیل (مهندسی معدن)

۸۸/۹/۲۴

(۱) برای رسم میدان شیب معادله دیفرانسیل $y' = xy+1$ به x و y مقادیر مناسب بدهید و شیب خط مماس بر منحنی جواب در آن نقطه را که همان y' یا $m = xy+1$ است محاسبه کنید.



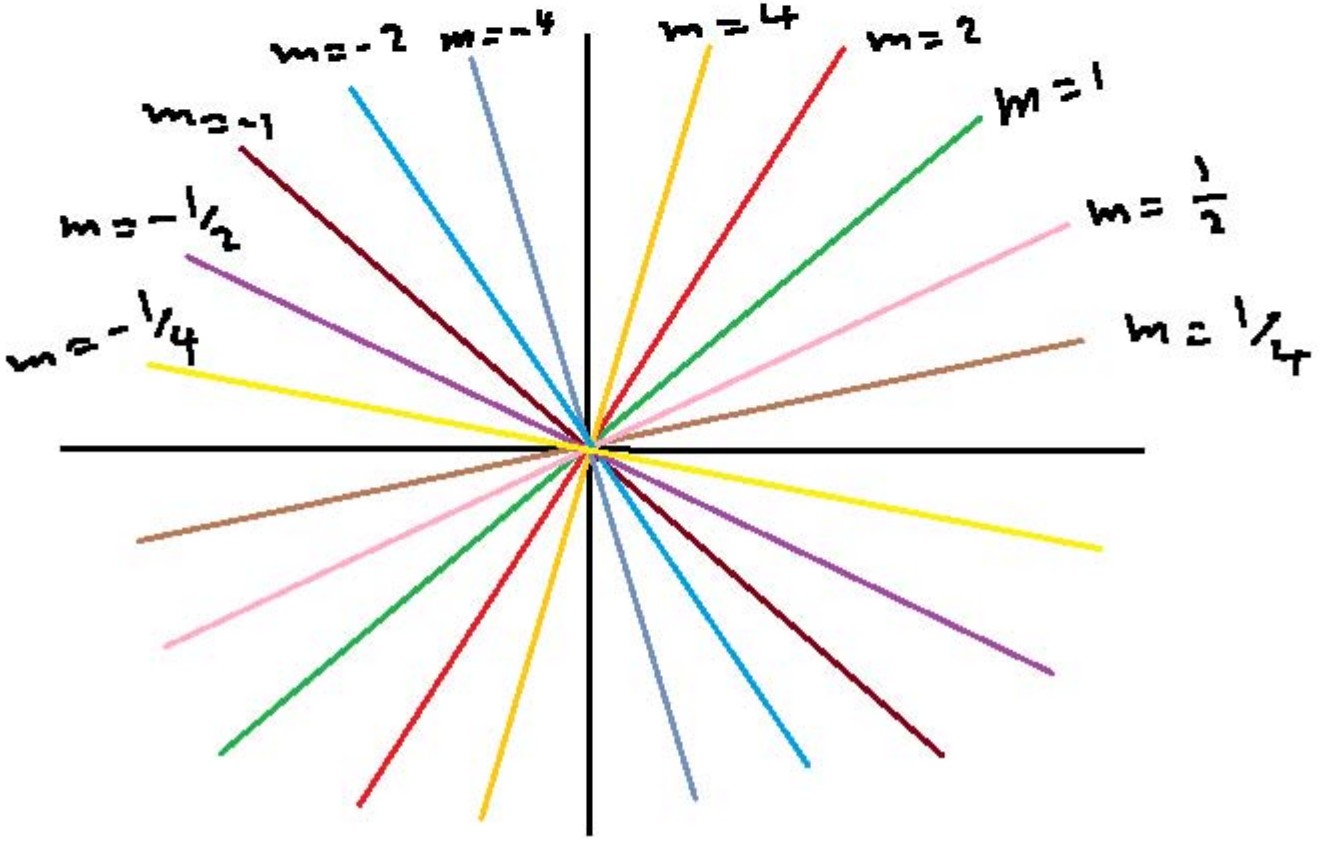
x	y	شیب $xy+1$
0	$\forall y$	1
$\forall y$	0	1
1	1	2
1	2	3
1	4	5
⋮	⋮	⋮
-1	1	0
⋮	⋮	⋮

اگر نیاز باشد نقاط دیگری را نیز در نظر بگیرید.

برای رسم میدان شیب بهتر است صفحه مختصات را بدقت رسم کرده و خطوط با شیب های مختلف را نیز در آن مشخص کنید:

$y = mx \leftarrow$ خط با شیب m

که از نقاط $(0,0)$ و $(1,m)$ می‌گذرد. سپس می‌توانید میدان شیب معادله دیفرانسیل $y' = f(x,y)$ را در آن مشخص کنید.



مسئله ② $\underbrace{\left(x^3+\cos y+\frac{1}{x}\right)}_{-N(x,y)}dy=\underbrace{\left(\frac{y}{x^2}-3yx^2\right)}_{M(x,y)}dx$

بررسی کامل بودن

$$\begin{cases} M(x,y)=\frac{y}{x^2}-3yx^2 \\ N(x,y)=-x^3-\cos y-\frac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{1}{x^2}-3x^2$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}=-3x^2+\frac{1}{x^2}$$

بنابراین $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ و معادله کامل است.

$F(x,y)=c$, $\frac{\partial F}{\partial x}=M$, $\frac{\partial F}{\partial y}=N$

$F(x,y)=\int M\,dx \to g(y)=-\frac{y}{x^2}-yx^3+g(y)$

$\frac{\partial F}{\partial y}=-\frac{1}{x}-x^3+g'(y)=N(x,y)=-x^3-\cos y-\frac{1}{x}$

$\Rightarrow g'(y)=-\cos y \Rightarrow g(y)=-\sin y$

جواب معادله عبارت است از: $F(x,y)=-\frac{y}{x^2}-yx^3-\sin y=c$

مقدار ثابت

مسأله (2) ب

$$\sqrt{x^2+y^2}\,dx = x\,dy - y\,dx$$

با $y = vx$ داریم

$$dy = v\,dx + x\,dv$$

$$\sqrt{x^2+x^2v^2}\,dx = \cancel{xv\,dx} + x^2\,dv - \cancel{xv\,dx}$$

$$\sqrt{1+v^2}\,dx = x\,dv \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}}$$

با انتگرال گیری نتیجه می شود :

$$\ln(x) = \ln\left(v+\sqrt{1+v^2}\right) + c_1$$

$$x = c_1\left(v+\sqrt{1+v^2}\right) \Rightarrow x = c_1\left(\frac{y}{x}+\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}\right)$$

$$x^2 = c_1\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

$$3xy' + y + x^2 y^4 = 0$$ $\frac{2}{2}$

این معادله برنولی است که با تغییر متغیر $z = y^{1-4} = y^{-3}$ حل می‌شود.

$\underline{3}$

$$y'' + y = \sec x$$

با روش تغییر پارامتر:

$$y'' + y = 0 \Rightarrow$$

$$y_1 = \cos x \ , \ y_2 = \sin x \quad , \quad y = u_1 y_1 + u_2 y_2$$

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \sec x & \cos x \end{vmatrix}}{\underbrace{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}}_{=1}} = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x \Rightarrow u_1(x) = \ln|\cos x|$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \sec x \end{vmatrix}}{+1} = 1 \Rightarrow u_2(x) = x$$

جواب خصوصی:

$$y = (\cos x)\ln|\cos x| + x\sin x$$

(I) $x^3 y''' - 3x^2 y'' + x(6-x^2)y' - (6-x^2)y = 0$

با جستجو مشخص می‌شود که یکی از جواب‌ها $y = x$ است. لذا

$y = xv$ داریم:

$y' = v + xv'$,

$y'' = 2v' + xv''$, $y''' = 3v'' + xv'''$

$x^3(3v'' + xv''') - 3x^2(2v' + xv'') + x(6-x^2)(v + xv') - (6-x^2)xv = 0$

$x^4 v''' - x^4 v' = 0 \Rightarrow \underline{v''' - v' = 0}$

این معادله نسبت به v' یک معادله مرتبه 2 است که جواب‌های آن عبارتند از:

$v' = e^x$, $v' = e^{-x} \Rightarrow v = e^x$, $v = -e^{-x}$

بنابراین جواب‌های مستقل خطی معادله (I) عبارتند از

$y = x$, $y = xe^x$, $y = xe^{-x}$

$e^{2x}, e^{-2x}, e^{3x}\cos 2x, e^{3x}\sin 2x$ ← جواب معادله همگن

۲, −۲, ۳ − ۲i, ۳ + ۲i	$e^x \sin ۲x$	$e^x(A\cos 2x + B\sin 2x)$
۱, ۱, ۲ e^x, xe^x, e^{2x}	$x^۳ e^x + x^۲$	$(Ax^3+Bx^2+Cx+D)e^x + Ex^2+Fx+G$
$+i, +i, -i, -i$, ۱, −۳	$x^۲ \cos x$	$(Ax^2+Bx+C)(D\cos x + E\sin x)$

$\sin x, x\sin x$
$\cos x, x\cos x$
e^x, e^{-3x}

فرم جواب خصوصی که

در روش ضرایب نامعین باید

در نظر گرفته شود.

$$y'' - x^2 y' - y = 0$$

$\underline{\underline{6}}$

$$y(0) = 1$$
$$y'(0) = -1$$

$$y'' = x^2 y' + y \Rightarrow y''(0) = 0 + y(0) = 1$$

$$y''' = 2xy' + x^2 y'' + y' \Rightarrow y'''(0) = 0 + 0 + y'(0) = -1$$

$$y^{(4)} = 2y' + 2xy'' + 2xy'' + x^2 y''' + y'' \Rightarrow$$

$$y^{(4)}(0) = 2y'(0) + 0 + 0 + 0 + y''(0)$$
$$= -2 + 1 = -1$$

از بسط تیلور داریم:

$$y(x) = y(0) + xy'(0) + \frac{1}{2} y''(0) x^2 + \frac{1}{6} y'''(0) x^3 + \frac{1}{24} y^{(4)}(0) x^4$$

$$= 1 - x + \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{24} x^4 .$$

7

روش سری

$$2x^2y'' - xy' + (1+x)y = 0.$$

$x=0$ یک نقطه غیرعادی منظم است لذا جواب فروبنیوس را در نظر بگیریم

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n}, \quad y' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (r+n) x^{r+n-1} \qquad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (r+n)(r+n-1) x^{r+n-2}.$$

جایگذاری در معادله

$$2x^2y'' - xy' + (1+x)y = \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n (r+n)(r+n-1) x^{r+n}$$
$$- \sum_{n=0}^{\infty} a_n (r+n) x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n+1}.$$

ساده سازی و مرتب کردن

معادله مشخصه

$$2x^2y'' - xy' + (1+x)y = a_0[2r(r-1) - r + 1]x^r$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \{[2(r+n)(r+n-1) - (r+n) + 1]a_n + a_{n-1}\} x^{r+n} = 0.$$

$$2r(r-1) - r + 1 = 2r^2 - 3r + 1 = (r-1)(2r-1) = 0.$$

$$r_1 = 1, \qquad r_2 = 1/2.$$

ریشه های معادله مشخصه

$$[2(r+n)(r+n-1) - (r+n) + 1]a_n + a_{n-1} = 0$$

رابطه بازگشتی

با $r = r_1 = 1,$ داریم

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{(2n+1)n}, \qquad n \geq 1.$$

$$a_1 = -\frac{a_0}{3 \cdot 1},$$
$$a_2 = -\frac{a_1}{5 \cdot 2} = \frac{a_0}{(3 \cdot 5)(1 \cdot 2)}, \qquad a_3 = -\frac{a_2}{7 \cdot 3} = -\frac{a_0}{(3 \cdot 5 \cdot 7)(1 \cdot 2 \cdot 3)}.$$

فرم کلی

$$a_n = \frac{(-1)^n}{[3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)]n!} a_0, \qquad n \geq 1. \qquad y_1(x) = x\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{[3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)]n!}\right], \qquad x > 0.$$

جواب اول

با فرض $r = r_2 = \frac{1}{2}$، از رابطه بازگشتی صفحه قبل داریم:

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{2n(n-\frac{1}{2})} = -\frac{a_{n-1}}{n(2n-1)}, \qquad n \geq 1.$$

$$a_1 = -\frac{a_0}{1 \cdot 1},$$

$$a_2 = -\frac{a_1}{2 \cdot 3} = \frac{a_0}{(1 \cdot 2)(1 \cdot 3)},$$

$$a_3 = -\frac{a_2}{3 \cdot 5} = -\frac{a_0}{(1 \cdot 2 \cdot 3)(1 \cdot 3 \cdot 5)},$$

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n![1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)]} a_0, \qquad n \geq 1.$$

جواب دوم

$$y_2(x) = x^{1/2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n![1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)]}\right], \qquad x > 0.$$

بنابراین جواب عمومی معادله عبارتست از:

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \qquad x > 0.$$

موفق باشید

فرض